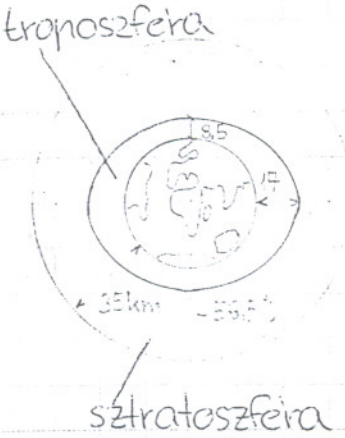
- Ha a gáz olyan nagyméretű térben van, hogy a nyomás térbeli megváltozása a gáz sűrűségének figyelembe jövő megváltozását okozza, a sűrűség változását figyelembe kell venni, a gáz nem tekinthető állandó sűrűségű közegnek.

## Izotermikus légkör:



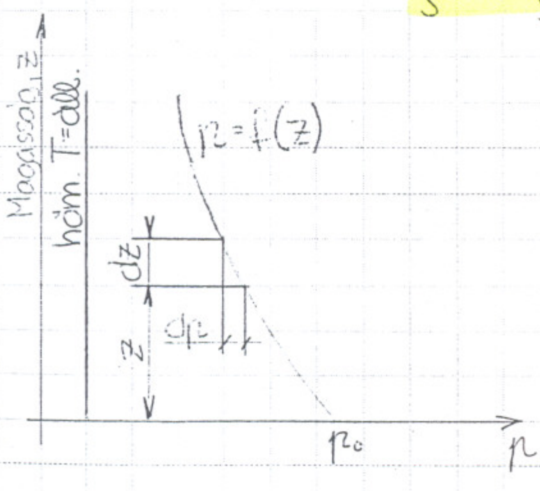

- Az izotermikus légkör esetében feltételezzük, hogy a levegő hőmérséklete az egész légkörben azonos, tehát a z magasságtól független. Ez a feltételezés a troposzféra légrétegeire, amely az egyenlítőnél 17km magasságig, a sarkoknál 8,5km-ig terjed, nem felel meg a valóságnak.
- Az előbbi légrétegen túli sztratoszférában kb. 35km magasságig, a hőmérséklet mintegy -56,5°C, tehát közel állandó (izotermikus).

- Izotermikus állapotra Boyle-Mariotte-állapotegyenlet érvényes:

$$p \cdot v = p \cdot \frac{1}{\rho} = \text{állandó}$$

- Legyen a föld felszínén a nyomás $p_0$ és a sűrűség $\rho_0$:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0}$$




- z magasságban a differenciálisan kis dz magasságváltozáshoz tartozó dp nyomásváltozás (Ekkor a sűrűséget állandónak tekintjük):

$$-dp = \rho \cdot g \cdot dz$$

növekvő magassággal a nyomás csökken

- Boyle-Mariotte-egyenletből:

$$\rho = \rho_0 \cdot \frac{p}{p_0}$$

- Ezzel a dp nyomásváltozás:

$$dp = -\frac{p}{p_0}\rho_0 \cdot g \cdot dz$$

A/7-2.

– A differenciálegyenlet integválásával megkapjuk a nyomás és a z magasság függvénykapcsolatát:

$$dz = -\frac{p_0}{\varrho_0 \cdot g} \cdot \frac{1}{p} dp$$

$$\int_0^z dz = -\frac{p_0}{\varrho_0 \cdot g} \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p}$$

$$[z]_0^z = -\frac{p_0}{\varrho_0 \cdot g} \cdot [\ln p]_{p_0}^{p}$$

$$z = -\frac{p_0}{\varrho_0 \cdot g} \cdot (\ln p - \ln p_0)$$

$$-\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot z = \ln \frac{p}{p_0}$$

$$\boxed{p = p_0 \cdot e^{-\frac{\varrho_0 \cdot g}{p_0} \cdot z}}$$

## A folytonosság (kontinuitás) tétele:

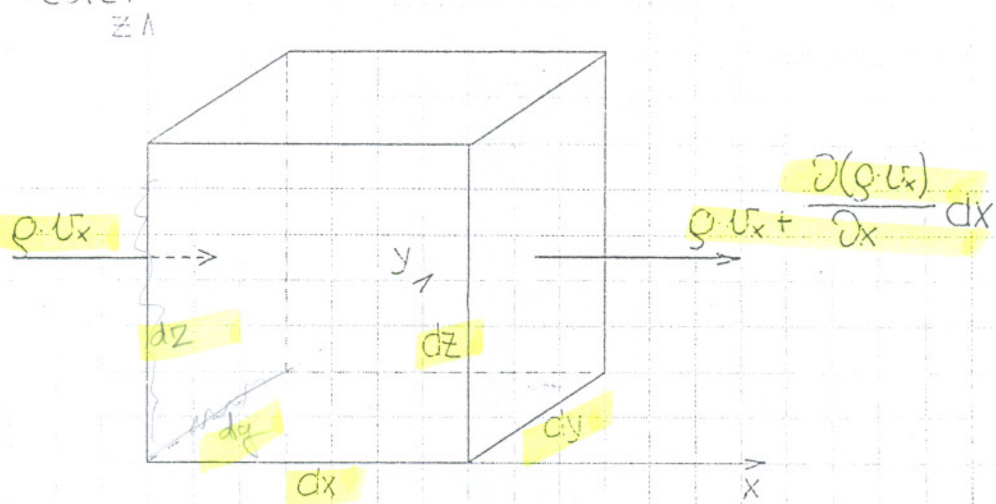
- kifejezi, hogy tömeg nem keletkezhet és nem tűnhet el
- A kontinuitási törvény általános alakja:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0}$$

(4) - összenyomható és súrlódásos közegre is igaz, instacioner áramlásnál is

Bizonyítás:

- Vegyünk fel egy dx, dy, dz oldalélekkel bíró elemi téglatestet:




- A téglatest bal oldali dy dz lapján a sebesség x irányú összetevője $v_x$, a sűrűség $\rho$. Így ezen a lapon másodpercenként beáramló tömeg:

$$\rho v_x \, dy \cdot dz \qquad \text{Beáramló tömeg}$$

- dx távolságon belül a sebesség és a sűrűség változását lineárisnak véve a $\rho \cdot v_x$ szorzat (tömegsebesség) értéke a jobb oldali lapon

$$\rho \cdot v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx$$

- A jobb oldali lapon másodpercenként kiáramló tömeg:

$$\left(\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx\right) dy \cdot dz \qquad \text{kiáramló tömeg}$$

- A ki- és beáramló tömegáram különbség (x irányban):

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \qquad x \text{ irányban}$$

- Hasonlóképpen y ill. z irányban a ki- és beáramló tömegáram különbségek:

$$\frac{\partial(\varrho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz \qquad y \text{ irányban}$$

$$\frac{\partial(\varrho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy \qquad z \text{ irányban}$$

- Ha feltételezzük, hogy tömeg nem tűnt el és nem keletkezett, akkor szükséges, hogy a három irányban felírt kiáramló többlet összege a téglatestben foglalt tömeg csökkenésével

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} dx \cdot dy \cdot dz$$ -vel legyen egyenlő.

($\varrho$ a téglatestben az átlagsűrűség, melyet azért differenciáltunk parciálisan az idő szerint, mert $\varrho$ általában nemcsak az időnek, hanem a helynek is függvénye, felvett téglatestünk viszont a térben állandó helyzetű.)

- Tehát:

$$-\frac{\partial \varrho}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\varrho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy$$

$$\frac{\partial(\varrho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\varrho \cdot \bar{v}) = -\frac{\partial \varrho}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \bar{v}) = 0}$$

- stacioner áramlásnál ill. összenyomhatatlan közegnél:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

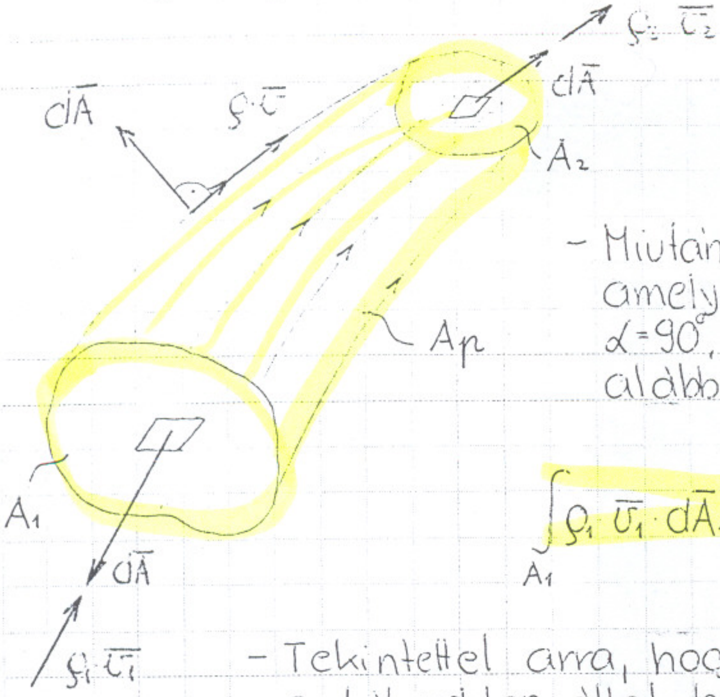
- Tehát ebben az esetben: $\operatorname{div}(\varrho \cdot \bar{v}) = 0$
$\varrho \cdot \operatorname{div} \bar{v} = 0$

- Vagyis $\operatorname{div} \bar{v} = 0$

- Felhasználva a Gauss-Osztrogradszkij-féle tételt:

$$\int_V \mathrm{div}(\rho\cdot\bar{v})\,dV = \int_A \rho\,\bar{v}\cdot d\bar{A}$$

- ahol az A az áramcső palástjából ($A_p$), valamint $A_1$ és $A_2$ be- és kilépő keresztmetszetekből áll.




- Miután az áramcső palástja áramfelület, amelyen nincs átáramlás ($\bar{v}\perp d\bar{A}$, vagyis $\alpha=90°$, így $|\bar{v}|\cdot|d\bar{A}|\cdot\cos\alpha=0$), ezért az alábbi összefüggés írható fel:

$$\int_{A_1} \rho_1\cdot\bar{v}_1\cdot d\bar{A}_1 + \int_{A_2} \rho_2\cdot\bar{v}_2\cdot d\bar{A}_2 = 0$$

- Tekintettel arra, hogy $\bar{v}\cdot d\bar{A} = |\bar{v}|\,|d\bar{A}|\cos\alpha$, ahol $\alpha$ a két vektor által bezárt szög, az egyenlet így módosul:

$$\int_{A_1} \rho_1\cdot|\bar{v}_1|\,|d\bar{A}_1|\cos 180° + \int_{A_2} \rho_2\cdot|\bar{v}_2|\,|d\bar{A}_2|\cdot\cos 0° = 0$$

- Tehát:

$$-\rho_1\cdot\bar{v}_1\cdot A_1 + \rho_2\cdot\bar{v}_2\cdot A_2 = 0$$

$$\boxed{\rho_1\cdot\bar{v}_1\cdot A_1 = \rho_2\cdot\bar{v}_2\cdot A_2}$$ stacioner áramlásra

- Ha $\rho$=állandó:

$$\boxed{\bar{v}_1\cdot A_1 = \bar{v}_2\cdot A_2}$$

- Kiindulási alap az Euler-egyenlet, amely egy olyan mozgás-egyenlet, amely a súrlódás elhanyagolása esetén összefüggést teremt a folyadékrész gyorsulása és a folyadékrészre ható erők között

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} - \bar{v} \times \mathrm{rot}\,\bar{v} = \bar{g} - \frac{1}{\rho}\cdot \mathrm{grad}\,p}$$

- Az Euler-egyenlet megoldásainak egy igen hatékony módja az egyenlet tagjainak az áramlási tér két (pl. 1-gyel és 2-vel jelölt) pontját összekötő vonal menti integrálása:

$$\underbrace{\int_1^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} d\bar{s}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_1^2 \mathrm{grad}\frac{v^2}{2} d\bar{s}}_{\mathrm{II}} - \underbrace{\int_1^2 \bar{v} \times \mathrm{rot}\,\bar{v}\, d\bar{s}}_{\mathrm{III}} = \underbrace{\int_1^2 \bar{g}\, d\bar{s}}_{\mathrm{IV}} - \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p\, d\bar{s}}_{\mathrm{V}}$$

$0 \Leftarrow$ I; II (✓) $\frac{v_2^2-v_1^2}{2}$; III $0$; IV $-(U_2-U_1)$; V $\frac{p}{\rho}$ ($\rho$=áll)

↑ <u>LEGÁLTALÁNOSABB ALAKBAN FELÍRT BERNOULLI-EGYENLET</u> ↑

<u>Egyszerűsítések:</u>

a) Miután $\Delta f = f_2 - f_1 = \int_1^2 \mathrm{grad}\,f\,d\bar{s}$ a II jelű integrál minden további feltétel nélkül a

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$ alakra hozható.

b) Ez az átalakítás a IV jelű integrálon is elvégezhető, ha a $\bar{g}$ erőtér potenciálos. A $\bar{g} = -\mathrm{grad}\,U$ helyettesítéssel és az integrálás elvégzésével a Bernoulli-egyenlet IV jelű tagja

$$-(U_2 - U_1)$$ alakú lesz.

c) Ha az áramlás stacionárius, akkor az egyenlet első tagja (I)

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \bar{0}$$

d) A III jelű tag számítása általában nehézséget okozna, ezért törekszünk zérussá tételére. E tag zérus értékű, ha:

- a $\bar{v}$ sebesség zérus
- $\mathrm{rot}\,\bar{v} = 0$, vagyis az áramlás potenciálos
- a $d\bar{s}$ a $\bar{v}$ és $\mathrm{rot}\,\bar{v}$ vektor által kifeszített síkba esik.

- a $d\bar{s} \parallel \bar{v}$, azaz az áramvonalon integrálunk
- a $d\bar{s} \parallel rot\,\bar{v}$, azaz az örvényvonalon integrálunk
- $\bar{v} \parallel rot\,\bar{v}$, ún. Beltrami áramlás

e) Az V tagban $\rho$=áll. esetén a $p/\rho$ gradienset kell vonal mentén integrálni, ami a $-\frac{p_2 - p_1}{\rho}$ eredményre vezet.
Ha $\rho = \rho(p)$ akkor az

$$-\frac{1}{\rho(p)}\,grad\,p = -grad\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho(p)}$$

összefüggés felhasználásával az V jelü integrál a

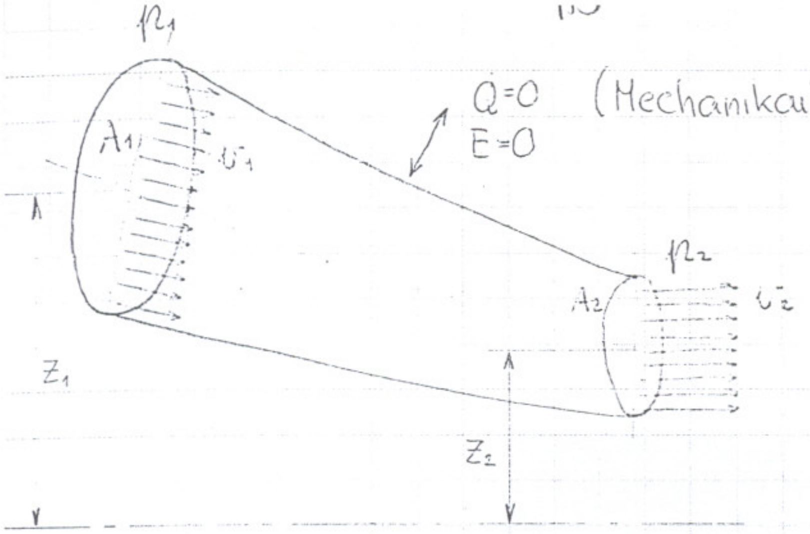
$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{\rho(p)}$$ alakra hozható.

- A müszaki gyakorlatban leggyakrabban elöforduló esetekben
  - Az áramló közeg ideálisnak vehetö:
    - súrlódásmentes ($\nu$=0)
    - összenyomhatatlan
    - állandó sürüségü ($\rho$=áll.)
    - nem molekuláris szerkezetü.
  - Az áramlás stacionárius
  - lehet az áramvonalon integrálni
  - az erötér a föld nehézségi erötere, ami potenciálos
  - az áramlás örvénymentes
- Ez esetben:

$$\boxed{\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + U_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + U_2}$$

- ahol $U$ a föld nehézségi erőterének potenciálja, ami felfelé mutató $z$ koordináta esetén az $U = g_0 z$ összefüggéssel írható le

- Az egyszerüsítö feltételek fennálása esetén a Bernoulli-összeg állandó egy áramvonal mentén (Potenciálos áramlás esetén a Bernoulli-összeg az egész áramlási térben állandó)




$Q=0$
$E=0$ (Mechanikai ill. hőenergiacsere nincs)

| | ① | ② |
| --- | --- | --- |
| – helyzeti (potenciális) energia: | $\dot m \cdot g \cdot z_1$ | $\dot m \cdot g \cdot z_2$ |
| – nyomási energia: | $\dot m \cdot p_1/\rho$ | $\dot m \cdot p_2/\rho$ |
| – mozgási (kinetikai) energia: | $\dot m \cdot v_1^2/2$ | $\dot m \cdot v_2^2/2$ |

– energiamegmaradás törvénye:

$$\dot m \cdot g \cdot z_1 + \dot m \cdot \frac{p_1}{\rho} + \dot m \cdot \frac{v_1^2}{2} = \dot m \cdot g \cdot z_2 + \dot m \cdot \frac{p_2}{\rho} + \dot m \cdot \frac{v_2^2}{2}$$

– az áramlás minden keresztmetszetére:

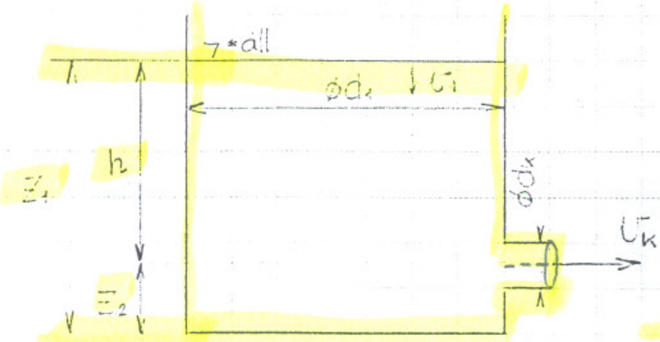
| | |
| --- | --- |
| $g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{állandó}$ | [J/kg] |
| $\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \rho}{2} = \text{állandó}$ | [Pa] |
| $z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2g} = \text{állandó}$ | [m] |

– vízszintes áramlásnál a $\rho g z$ tag kiesik, mivel z nem változik. Így az egyenlet a következő módon egyszerűsödik:

$$\underbrace{p}_{p_{st}} + \underbrace{\rho \cdot \frac{v^2}{2}}_{p_{din}} = \underbrace{\text{állandó}}_{p_0}$$

# Bernoulli-egyenlet alkalmazásai:

## Kiömlés nyitott tartályból:




- Mivel $d_1 \gg d_k$, így a tartály szintjének csökkenése elhanyagolható, vagyis $v_1 \approx 0$
- $p_1 = p_2$, mivel környezeti nyomásról van szó

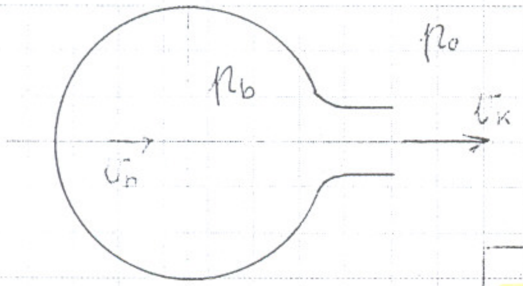
$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_k^2}{2g}$$

$$z_1 - z_2 = h = \frac{v_k^2}{2g}$$

- Tehát:

$$\boxed{v_k = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}}$$ Torricelli-képlet

## Kiáramlás nyomás alatti tartályból:




- $z_1 = z_2$
- $v_b \approx 0$

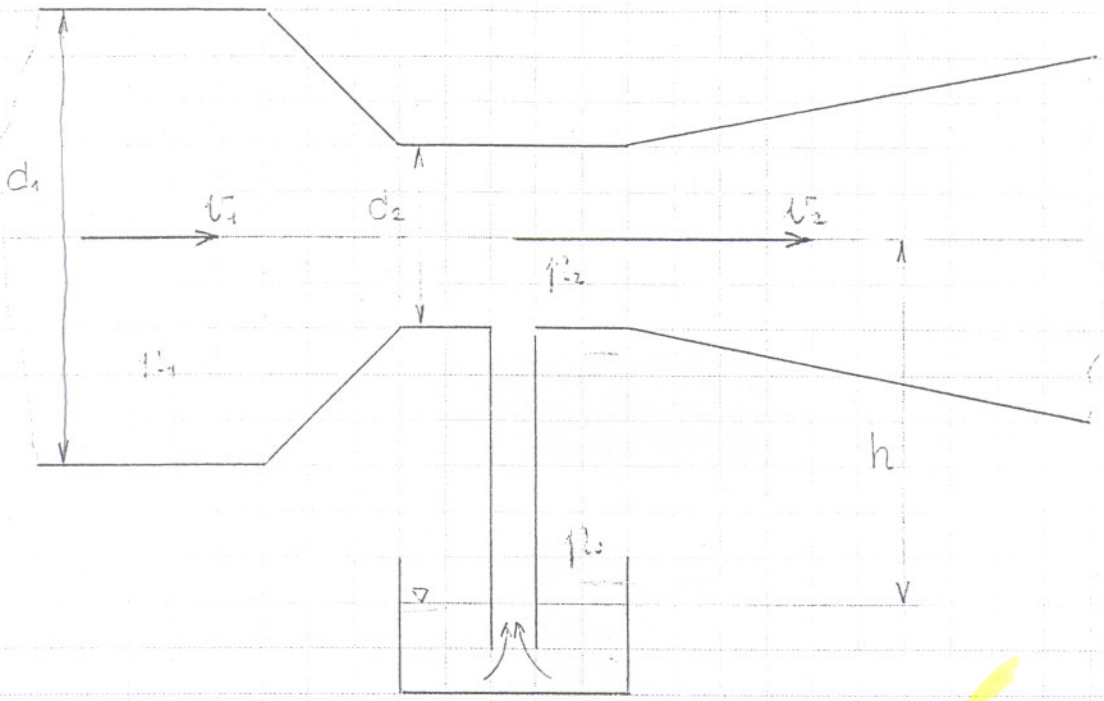
$p_b > p_0$

$$z_1 + \frac{p_b}{\rho \cdot g} + \frac{v_b^2}{2g} = z_2 + \frac{p_0}{\rho g} + \frac{v_k^2}{2g}$$

$$\boxed{v_k = \sqrt{\frac{2 \cdot (p_b - p_0)}{\rho}}}$$

## Sugárszivattyú:

- Vízszintes helyzetű csővezeték egyik helyén az eredeti $d_1$ átmérő $d_2$-re szűkül
- A szűkített szakaszhoz egy erre merőleges kisebb átmérőjű függőleges cső csatlakozik




- $z_1 = z_2$, tehát:

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

- Felhasználva a folytonosság tételét:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2$$

$$v_1 \cdot \frac{d_1^2 \pi}{4} = v_2 \cdot \frac{d_2^2 \pi}{4}$$

$$v_2 = v_1 \cdot \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

- visszahelyettesítve:

$$p_2 = p_1 - \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 \cdot \frac{d_1^4}{d_2^4} - v_1^2\right) = p_1 - \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1\right)$$

- A szívóhatás értéke:

$$p_0 - p_2 = \rho \cdot g \cdot h \qquad h = \frac{p_0 - p_2}{\rho \cdot g}$$